Pontos sobre a reta **R**, correspondentes aos números da seqüência $2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2},...$ ou da seqüência $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/3, \sqrt{2}/4,...$, podem facilmente ser marcados a partir do ponto correspondente a $\sqrt{2}$. Todavia, não dispomos de uma construção geométrica que nos permita marcar sobre **R** pontos correspondentes aos números irracionais e, π e outros e nem de argumentos que nos possibilitem provar que tais pontos existem. Isto se dá porque, a rigor, não definimos número irracional. A definição de número irracional, bem como sua construção, em geral, é apresentada nos livros de Análise Matemática. Para os propósitos da Geometria Analítica, é suficiente o seguinte resultado, que admitiremos como postulado.

*A cada ponto da reta **R** corresponde um único número (racional ou irracional).*

Os números cuja existência é garantida por este postulado são chamados ***números reais.***

Dizemos que a é um número menor que b se na reta **R** a estiver à esquerda de b. Indicamos isto assim

$$a<b$$

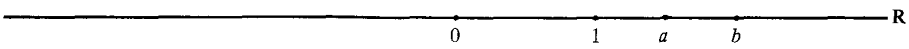

Fig. 1.6

A notação $a \leq b$ significa que a é um número que está à esquerda de b ou é o próprio b. Utiliza-se também a notação $b \geq a$, significando o mesmo que $a \leq b$.

Com respeito à relação $\leq$, dois fatos merecem ser destacados. O primeiro é a compatibilidade dessa relação com a operação de adição, a qual pode ser dita assim:

$$\textit{se } a \leq b, \textit{ então } a + x \leq b + x, \ \forall x \in \boldsymbol{R}.$$

Em particular, para $x = -b$, obtemos

$$a \leq b \text{ é equivalente } a - b \leq 0.$$

O segundo fato diz que, em relação à operação de multiplicação, $\leq$ não se comporta tão bem como em relação à adição. De fato, se $a \leq b$, temos:

$$ax \leq bx \text{ se } x \geq 0 \quad \text{e} \quad ax \geq bx \text{ se } x < 0.$$

Exercícios

1.1. Justifique a construção feita na Figura 1.2.
1.2. Represente na reta **R** os números $\sqrt{5}, \sqrt{6}, -3\sqrt{2}$, 0,6 e $4\sqrt{3}/7$.
1.3. Demonstre que, se p é um número inteiro, então p e p^2 são ambos pares ou ambos ímpares.
1.4. Se a e b são números racionais e s irracional, prove que:
  a) $a + b$ e ab são racionais;
  b) $a + s$ e as são irracionais, se $a \neq 0$.
1.5. Dê exemplos de números irracionais s_1, s_2, s_3, s_4, tais que:
  a) $s_1 s_2$ seja racional;
  b) $s_3 s_4$ seja irracional.

1.6. Considere a figura abaixo

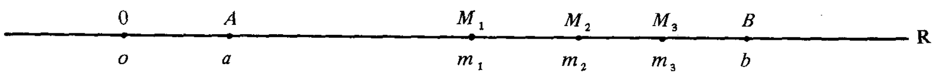

Fig. 1.7

a) Demonstre que, se M_1 é o ponto médio de AB, então m_1 é a média aritmética de a e b.
b) Seja m_2 o ponto médio de M_1B, m_3 o ponto médio de M_2 B e assim por diante. Calcule a soma:

$$(m_1 - a) + (m_2 - m_1) + (m_3 - m_2) + \ldots$$

1.7. Construa uma seqüência de números irracionais $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ satisfazendo $2 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{10} < 3$.
1.8. Se a e b são números reais positivos, mostre que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

1.9. Usando o Exercício 1.8, mostre que a altura de um triângulo retângulo, relativamente à hipotenusa, é menor ou igual à metade da hipotenusa.
1.10. A Figura 1.8 mostra como estabelecer uma correspondência biunívoca entre os pontos X do segmento AB e os pontos Y do segmento $A'B'$. Expresse o comprimento de OY em termos de OX, AB e $A'B'$.

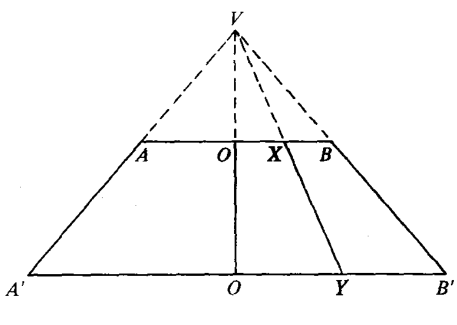

Fig. 1.8

1.5 VALOR ABSOLUTO

Se x é um número real, o módulo de x (ou valor absoluto de x) é o número $|x|$ definido por

$$|x| = x \text{ se } x \geq 0$$

$$|x| = -x \text{ se } x < 0.$$

Exercícios

1.11. Mostre que $|a+b|=|a|+|b|$ se, e somente se, a e b forem ambos ≥ 0 ou ambos ≤ 0.

1.12. Encontre os valores de x que satisfaçam a cada uma das desigualdades:

a) $|x-2|<1$;
b) $|x-2|>1$;
c) $|x-2|=1$;
d) $|x^2-4|\geq 2$;
e) $|3-2x^2|\leq 9$;
f) $|x-1|<|x-2|$.

1.13. Determine b, para que se tenha:

a) $|2x-3|<b \Leftrightarrow 0<x<3$.
b) $|5x+b|\leq 2 \Leftrightarrow -1\leq x\leq -1/5$;
c) $|b-1|=|3b-4|$.

1.14. Justifique ou dê contra-exemplo para as implicações seguintes:

a) $a<b \Rightarrow a^2<b^2$;
b) $|a|<|b| \Rightarrow a^2<b^2$;
c) $a<b \Rightarrow a^3<b^3$;
d) $a\neq b \Rightarrow |a|\neq |b|$;
e) $|a|\neq |b| \Rightarrow a\neq b$.

1.15. Demonstre que para qualquer número real x se tem:

a) $|x|=|-x|$;
b) $-|x|\leq x\leq |x|$.

1.16. Demonstre que:

a) $|a|-|b|\leq |a-b|$;
b) $||a|-|b||\leq |a-b|$;

quaisquer que sejam os números a e b.

1.17. Sejam a e b números reais positivos. Mostre que:

a) $-b<x<a \Leftrightarrow |2x+b-a|<a+b$;
b) $-2b<x+a-b<2a \Leftrightarrow |x|<a+b$.

1.18. Encontre os valores de x que satisfaçam as seguintes desigualdades:

a) $3x+5<23$;
b) $(x-1)(x-3)<0$;
c) $x^2-5x<-6$;
d) $x^3+x^2\geq 0$;
e) $\dfrac{2x}{x-2}\geq 1$.

1.19. Prove que as raízes quadradas r_1 e r_2 de um número real positivo satisfazem:

a) $|r_1| = |r_2|$;
b) $r_1 + r_2 = 0$.

1.20. Que condições devem satisfazer a e b para que se tenha

$|a-b| = b-a$?

1.21. Resolva as seguintes equações:

a) $x^2 - 5|x| + 6 = 0$;
b) $x^2 + |4x| - 21 = 0$;
c) $x^2 + 4|x| + 3 = 0$;
d) $|x^2 - 3x| = 2$;
e) $\left(|x|^5 + |18x^3| + 1\right)\left(x^2 - 1\right) = 0$.