Matemática - RC/UFG

Laboratório de Simulação Matemática

Parte 7[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

2/2017

[2][Cap. 7] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Norma de Vetores e Matrizes

- Seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todos os vetores colunas n-dimensionais formado de componentes reais.
- A definição de distância no $\mathbb{R}^n$ usa a noção de norma, que é uma generalização de valor absoluto nos reais $\mathbb{R}$.
- **Definição.** A *norma de um vetor* no $\mathbb{R}^n$ é uma função, $\|\cdot\|$, que leva do $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:
  - (i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$;
  - (ii) $\|x\| = 0$ se e somente se x for o vetor nulo;
  - (iii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^n$;
  - (iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.
- Vetores no $\mathbb{R}^n$ são vetores colunas representados por

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

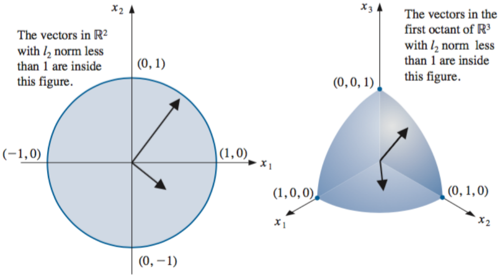
podendo ser escritos como $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$.

Norma de Vetores e Matrizes

- **Definição.** As normas l_2 e l_∞ do vetor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ são definidas, respectivamente, por:

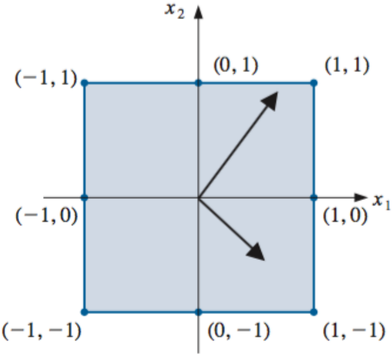
$$\|x\|_2 = \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}} \quad \text{e} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|. \tag{1}$$

- A norma l_2 é chamada de *norma Euclidiana* do vetor x, pois ela representa a notação usual de distância com relação a origem do sistema de coordenadas. A figura abaixo ilustra a l_2.

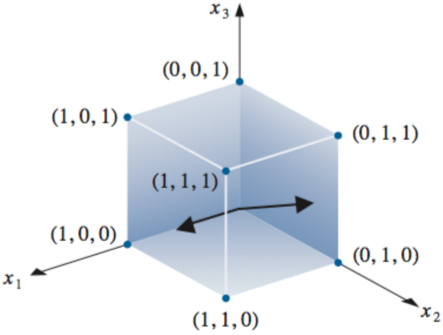


Norma de Vetores e Matrizes

- A figura abaixo representa a norma l_∞ no plano e no espaço.



The vectors in $\mathbb{R}^2$ with l_∞ norm less than 1 are inside this figure.



The vectors in the first octant of $\mathbb{R}^3$ with l_∞ norm less than 1 are inside this figure.

Exemplo

- **Exemplo.** Determine a norma l_2 e l_∞ do vetor $x = (-1, 1, -2)^t$.
- **Resposta.** O vetor está no $\mathbb{R}^3$, de forma que as normas são:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|-1|, |1|, |-2|\} = 2.$$

- **Teorema.** A desigualdade de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz diz que para cada $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ em $\mathbb{R}^n$, tem-se:

$$\mathbf{x}^t\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right\}^{1/2} \left\{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right\}^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2 \cdot \|\mathbf{y}\|_2.$$

Distância entre Vetores

- **Definição.** Se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^t$ são vetores no $\mathbb{R}^n$, então as distâncias l_2 e l_∞ são definidas por:

$$\|x - y\|_2 = \sqrt{\left\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right\}} \qquad \text{e} \qquad \|x - y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|. \quad (2)$$

- **Exemplo.** A solução exata do sistema linear abaixo é $x = (1, 1, 1)$, enquanto a solução aproximada pelo método de Eliminação de Gauss é $\tilde{x} = (1,2001; 0,99991; 0,92538)$. Determine as distâncias l_2 e l_∞.

$$3.3330x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 15913,$$

$$2.2220x_1 + 16.710x_2 + 9.6120x_3 = 28.544,$$

$$1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254$$

Exemplo

- **Resposta.** As distâncias são:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_\infty &= \max\{|1-1.2001|, |1-0.99991|, |1-0.92538|\}\\ &= \max\{0.2001, 0.00009, 0.07462\} = 0.2001\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}-\tilde{\mathbf{x}}\|_2 &= \left[(1-1.2001)^2 + (1-0.99991)^2 + (1-0.92538)^2\right]^{1/2}\\ &= [(0.2001)^2 + (0.00009)^2 + (0.07462)^2]^{1/2} = 0.21356.\end{aligned}$$

- Observe que a primeira componente de $\tilde{x}$ domina em ambas as distâncias, pois ela diverge bem do valor exato.
- **Definição.** A sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$ no $\mathbb{R}^n$ converge para $x \in \mathbb{R}^n$ com respeito a norma $\|\cdot\|$, se dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um inteiro $N(\epsilon)$ tal que:

$$\|x^{(k)} - x\| \leq \epsilon, \quad \text{para todo } k \geq N(\epsilon). \tag{3}$$

Norma de Matriz e Distâncias

- **Definição.** A *norma de uma matriz* sobre o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ é uma função real, $\| \cdot \|$, definida sobre este conjunto, satisfazendo para todas as matrizes A e B de ordem $n \times n$ e todos os números reais α:
  - (i) $\|A\| \geq 0$;
  - (ii) $\|A\| = 0$ se e somente se A for a matriz nula;
  - (iii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$;
  - (iv) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$;
  - (v) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;
- A *distância entre as matrizes* A e B de ordem $n \times n$ com relação a norma de uma matriz é $\|A - B\|$.
- **Teorema.** A norma l_∞ de uma matriz A de ordem $n \times n$ é:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{4}$$

Exemplo

- **Exemplo.** Determine a norma l_∞ para a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Resposta.** Para cada linha i da matriz, faz-se:

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{1j}| = |1| + |2| + |-1| = 4, \quad \sum_{j=1}^{3} |a_{2j}| = |0| + |3| + |-1| = 4,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |a_{3j}| = |5| + |-1| + |1| = 7.$$

- Pelo Teorema anterior, o resultado é $\|A\|_\infty = \max\{4, 4, 7\} = 7$.

Produto Interno

- O produto interno entre dois vetores n-dimensionais x e y é denotado por $\langle x, y \rangle = x^t y$.
- **Teorema.** Para quaisquer vetores x, y e z e qualquer número real α, tem-se que:
  - (i) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
  - (ii) $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;
  - (iii) $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle$;
  - (iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$;
  - (iv) $\langle x, x \rangle = 0$ se e somente se x for o vetor nulo.
- Nos casos em que uma matriz A é positiva definida, então $\langle x, Ax \rangle = x^t Ax > 0$, a menos que $x = 0$.
- Segue também que $\langle x, Ay \rangle = (Ax)^t y = x^t A^t y = x^t Ay = \langle Ax, y \rangle$.

Técnicas Iterativas

- Métodos iterativos são usados para resolver sistemas lineares grandes e esparsos, em especial, em problemas de valor de contorno e equações diferenciais parciais.
- Uma técnica iterativa para resolver um sistema $Ax = b$ inicia com uma solução aproximada $x^{(0)}$ da solução x e gera uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ que convergem para x.
- O *método iterativo de Jacobi* é obtido resolvendo a i-ésima equação em $Ax = b$ para x_i de forma a obter, sabendo que $a_{ii} \neq 0$:

$$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left(- \frac{a_{ij} x_j}{a_{ii}} \right) + \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

- Em seguida, para cada $k \geq 1$, geram-se as componentes $x_i^{(k)}$ do vetor $x^{(k)}$ a partir das respectivas componentes de $x^{(k-1)}$.

Método de Jacobi

- Ou seja:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left(-a_{ij}x_j^{(k-1)}\right) + b_i\right], \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n.$$

- O método de Jacobi pode ser escrito na forma $x^{(k)} = Tx^{(k-1)} + c$, em que a matriz A pode ser dividida em matrizes diagonais e não diagonais.
- Por exemplo, para o sistema de equações $Ax = b$ adiante, obtêm-se as matrizes T e c a partir do isolamento das variáveis x_i para cada linha E_i.

$$\begin{aligned}
E_1 &: \quad 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6,\\
E_2 &: \quad -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25,\\
E_3 &: \quad 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11,\\
E_4 &: \quad 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{aligned}$$

Método de Jacobi

- Ao isolar as variáveis x_i, tem-se:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \qquad\qquad \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{5}x_3 \qquad\qquad + \frac{3}{5},\\
x_2 &= \frac{1}{11}x_1 \qquad\qquad + \frac{1}{11}x_3 - \frac{3}{11}x_4 + \frac{25}{11},\\
x_3 &= -\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{10}x_2 \qquad\qquad + \frac{1}{10}x_4 - \frac{11}{10},\\
x_4 &= \qquad\qquad - \frac{3}{8}x_2 + \frac{1}{8}x_3 \qquad\qquad + \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

ive

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & 0 \\ \frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ -\frac{1}{5} & \frac{1}{10} & 0 & \frac{1}{10} \\ 0 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{25}{11} \\ -\frac{11}{10} \\ \frac{15}{8} \end{bmatrix}.$$

Método de Jacobi

- O método finaliza ao satisfazer o critério de parada: $\frac{\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|_\infty}{\|x^{(k)}\|_\infty} < TOL$
- Ao considerar a aproximação inicial $x^{(0)} = (0,0,0,0)$ para o exemplo anterior, obtém-se $x^{(1)}$ fazendo:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(1)} &= \frac{1}{10}x_2^{(0)} - \frac{1}{5}x_3^{(0)} + \frac{3}{5} = 0.6000,\\
x_2^{(1)} &= \frac{1}{11}x_1^{(0)} + \frac{1}{11}x_3^{(0)} - \frac{3}{11}x_4^{(0)} + \frac{25}{11} = 2.2727,\\
x_3^{(1)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(0)} + \frac{1}{10}x_2^{(0)} + \frac{1}{10}x_4^{(0)} - \frac{11}{10} = -1.1000,\\
x_4^{(1)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(0)} + \frac{1}{8}x_3^{(0)} + \frac{15}{8} = 1.8750.
\end{aligned}
$$

Método de Jacobi

INPUT the number of equations and unknowns n; the entries a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ of the matrix A; the entries b_i, $1 \leq i \leq n$ of $\mathbf{b}$; the entries XO_i, $1 \leq i \leq n$ of $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$; tolerance TOL; maximum number of iterations N.

OUTPUT the approximate solution $x_1, \ldots, x_n$ or a message that the number of iterations was exceeded.

Step 1 Set $k = 1$.

Step 2 While ($k \leq N$) do Steps 3–6.

Step 3 For $i = 1, \ldots, n$

$$\text{set } x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(a_{ij}XO_j) + b_i\right].$$

Método de Jacobi

Step 4 If $||\mathbf{x} - \mathbf{XO}|| < TOL$ then OUTPUT $(x_1, \ldots, x_n)$;
(The procedure was successful.)
STOP.

Step 5 Set $k = k + 1$.

Step 6 For $i = 1, \ldots, n$ set $XO_i = x_i$.

Step 7 OUTPUT ('Maximum number of iterations exceeded');
(The procedure was successful.)
STOP.

Figura: Pseudo-código para o método iterativo de Jacobi.

Método de Gauss-Seidel

- Considera-se durante o cálculo de $x_i^{(k)}$ todos os valores já calculados para $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{i-1}^{(k)}$, além dos valores da iteração anterior em $x^{(k-1)}$. Ou seja:

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[-\sum_{j=1}^{i-1} (a_{ij} x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n} (a_{ij} x_j^{(k-1)}) + b_i \right]$$

- Essa modificação resulta no *método iterativo de Gauss-Siedel*. Aplicando sobre o sistema linear anterior, tem-se:

$$\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \frac{3}{5},\\
x_2^{(k)} &= \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} + \frac{25}{11},\\
x_3^{(k)} &= -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \frac{11}{10},\\
x_4^{(k)} &= -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8}.
\end{aligned}$$

Método de Gauss-Seidel

INPUT the number of equations and unknowns n; the entries a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ of the matrix A; the entries b_i, $1 \leq i \leq n$ of $\mathbf{b}$; the entries XO_i, $1 \leq i \leq n$ of $\mathbf{XO} = \mathbf{x}^{(0)}$; tolerance TOL; maximum number of iterations N.

OUTPUT the approximate solution $x_1, \ldots, x_n$ or a message that the number of iterations was exceeded.

Step 1 Set $k = 1$.

Step 2 While ($k \leq N$) do Steps 3–6.

Step 3 For $i = 1, \ldots, n$

$$\text{set } x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}XO_j + b_i\right].$$

Método de Gauss-Seidel

Step 4 If $||\mathbf{x} - \mathbf{XO}|| < TOL$ then OUTPUT $(x_1, \ldots, x_n)$;
(*The procedure was successful.*)
STOP.

Step 5 Set $k = k + 1$.

Step 6 For $i = 1, \ldots, n$ set $XO_i = x_i$.

Step 7 OUTPUT ('Maximum number of iterations exceeded');
(*The procedure was successful.*)
STOP.

Figura: Pseudo-código para o método iterativo de Gauss-Siedel.

- Em geral, o método de Gauss-Siedel é superior ao método de Jacobi.