Laboratório de Simulação Matemática

Parte 5[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

2/2017

[2][Cap. 5] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Métodos de Múltiplos Passos

- Os métodos discutidos anteriormente são chamados de *métodos de passos simples*, uma vez que a aproximação do ponto t_{i+1} ocorre somente a partir do ponto t_i.
- Observe que a aproximação é obtida nos pontos $t_0, t_1, \ldots, t_i$ antes de obter em t_{i+1}.
- Além disso, o erro $|w_j - y(t_j)|$ tende a crescer com j, daí a necessidade de usar mais informações anteriores para aproximar em t_{i+1}.
- Métodos que usam a aproximação em mais de um ponto anterior para aproximar nos próximos pontos são chamados de *método de múltiplos passos*.

Métodos de Múltiplos Passos

- **Definição.** Um *método de múltiplos passos com m-passos* para resolver um problema de valor inicial:

$$y' = f(t, y), \; a \leq t \leq b, \; y(a) = \alpha,$$

tem a equação de diferenças para aproximar em t_{i+1} dada por:

$$w_{i+1} = a_{m-1}w_i + a_{m-2}w_{i-1} + \cdots + a_0 w_{i+1-m} + \\ h[b_m f(t_{i+1}, w_{i+1}) + b_{m-1}f(t_i, w_i) + \cdots + b_0 f(t_{i+1-m}, w_{i+1-m})],$$

para $i = m-1, m, \ldots, N-1$, sendo $h = \frac{b-a}{N}$, as constantes $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ e $b_0, b_1, \ldots, b_m$, e os valores iniciais conhecidos:

$$w_0 = \alpha, \; w_1 = \alpha_1, \; w_2 = \alpha_2, \ldots, w_{m-1} = \alpha_{m-1}.$$

- Quando $b_m = 0$, o método é chamado de *explícito*, pois w_{i+1} é obtido explicitamente em termos dos valores anteriores.

Métodos de Múltiplos Passos

- Quando $b_m \neq 0$, o método é chamado de *implícito*, pois w_{i+1} ocorre em ambos os lados, sendo obtido implicitamente.
- As equações, para $i = 3, 4, \ldots, N-1$, definem o *método de Adams-Bashforth de Quarta Ordem* explícito:

$$w_0 = \alpha,\ w_1 = \alpha_1,\ w_2 = \alpha_2,\ w_3 = \alpha_3, \tag{1}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[55f(t_i, w_i) - 59f(t_{i-1}, w_{i-1}) + 37f(t_{i-2}, w_{i-2}) - 9f(t_{i-3}, w_{i-3})\right]. \tag{2}$$

- As equações, para $i = 2, 3, \ldots, N-1$, definem o *método de Adams-Moulton de Quarta Ordem* implícito:

$$w_0 = \alpha,\ w_1 = \alpha_1,\ w_2 = \alpha_2, \tag{3}$$

$$w_{i+1} = w_i + \frac{h}{24}\left[9f(t_{i+1}, w_{i+1}) + 19f(t_i, w_i) - 5f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_{i-2}, w_{i-2})\right]. \tag{4}$$

- Os valores inicias em $w_0, w_1, \ldots$ podem ser especificados usando algum método de passo simples, como Runge-Kutta.

Métodos Preditores-Corretores

- Os métodos implícitos possuem uma fraqueza: converter a equação de diferenças numa forma algébrica com a representação explícita de w_{i+1}.
- Uma alternativa seria utilizar o método de Newton para aproximar w_{i+1} e, assim, considerar os métodos implícitos.
- Por isso, os métodos implícitos acabam sendo usados para melhorar as aproximações obtidas a partir dos métodos explícitos.
- A combinação de um método explícito para aproximar e o método implícito para melhorar a aproximação resulta no *método Preditor-Corretor*.
- No caso dos métodos de Quarta Ordem, usa-se um método de passo simples, como Runge-Kutta, para obter os valores iniciais w_0, w_1, w_2 e w_4.

Métodos Preditores-Corretores

- O próximo passo é calcular a aproximação w_{4p} usando o método explícito de Adams-Bashforth como preditor:

$$w_{4p} = w_3 + \frac{h}{24}[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]. \quad (5)$$

- Essa aproximação é então melhorada ao considerar w_{4p} no lado direito do método implícito de Adams-Moulton (corretor):

$$w_4 = w_3 + \frac{h}{24}[9f(t_4, w_{4p}) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]. \quad (6)$$

- Observe que é preciso avaliar apenas $f(t_4, w_{4p})$ no corretor, uma vez que f já foi avaliada nos outros pontos no preditor.
- Uma forma de melhorar a precisão da aproximação é utilizar um tamanho de passo menor do que considerar um corretor de ordem mais alta.

Método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem

INPUT endpoints a, b; integer N; initial condition α.

OUTPUT approximation w to y at the $(N+1)$ values of t.

Step 1 Set $h = (b-a)/N$;
$t_0 = a$;
$w_0 = \alpha$;
OUTPUT (t_0, w_0).

Step 2 For $i = 1, 2, 3$, do Steps 3–5.
(*Compute starting values using Runge-Kutta method.*)

Step 3 Set $K_1 = hf(t_{i-1}, w_{i-1})$;
$K_2 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_1/2)$;
$K_3 = hf(t_{i-1} + h/2, w_{i-1} + K_2/2)$;
$K_4 = hf(t_{i-1} + h, w_{i-1} + K_3)$.

Step 4 Set $w_i = w_{i-1} + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$;
$t_i = a + ih$.

Step 5 OUTPUT (t_i, w_i).

Método Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem

Step 6 For $i = 4, \ldots, N$ do Steps 7–10.

Step 7 Set $t = a + ih$;

$$w = w_3 + h[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]/24; \qquad (\textit{Predict} \quad w_i.)$$

$$w = w_3 + h[9f(t, w) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]/24. \qquad (\textit{Correct} \quad w_i.)$$

Step 8 OUTPUT (t, w).

Step 9 For $j = 0, 1, 2$

set $t_j = t_{j+1}$; (*Prepare for next iteration.*)

$w_j = w_{j+1}$.

Step 10 Set $t_3 = t$;

$w_3 = w$.

Step 11 STOP.

Exemplo

- **Exemplo.** Calcule a aproximação w_4, para $t = 0,8$, usando o método de Preditor-Corretor de Adams de Quarta Ordem, sabendo que $w_0 = 0,5$, $w_1 \approx 0,8292933$, $w_2 \approx 1,2140762$ e $w_3 \approx 1,6489220$. O tamanho do passo é $h = 0,2$ e o problema é: $y' = y - t^2 + 1,\ 0 \leq t \leq 2,\ y(0) = 0,5$.
- **Resposta.** Primeiro, calcula-se o preditor pelo método de Adam-Bashforth:
  $w_{4p} = w_3 + \frac{h}{24}[55f(t_3, w_3) - 59f(t_2, w_2) + 37f(t_1, w_1) - 9f(t_0, w_0)]$,
  $w_{4p} = 1,6489220 + \frac{0,2}{24}[55f(0,6; 1,6489220) - 59f(0,4; 1,2140762) + 37f(0,2; 0,8292933) - 9f(0; 0,5)]$,
  $w_{4p} = 2,1272892$.
- Agora, considera-se o valor de w_{4p} no corretor pelo método de Adams-Moulton:
  $w_4 = w_3 + \frac{h}{24}[9f(t_4, w_{4p}) + 19f(t_3, w_3) - 5f(t_2, w_2) + f(t_1, w_1)]$,
  $w_4 = 1,6489220 + \frac{0,2}{24}[9f(0,8; 2,1272892) + 19f(0,6; 1,6489220) - 5f(0,4; 1,2140762) + f(0,2; 0,8292933)]$,
  $w_4 = 2,1272056$.

Sistemas de Equações Diferenciais

- Um sistema de m-ésima ordem de problemas de valor inicial tem a forma:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt} =& f_1(t, u_1, u_2, \ldots, u_m),\\ \frac{du_2}{dt} =& f_2(t, u_1, u_2, \ldots, u_m),\\ &\vdots\\ \frac{du_m}{dt} =& f_m(t, u_1, u_2, \ldots, u_m),\end{aligned}$$

para $a \leq t \leq b$, com as condições iniciais:

$$u_1(a) = \alpha_1,\ u_2(a) = \alpha_2,\ \ldots,\ u_m(a) = \alpha_m.$$

- O objetivo é encontrar m funções $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_m(t)$ que

Sistemas de Equações Diferenciais

- Adiante será feita extensão do método de Runge-Kutta de Quarta Ordem para resolver sistemas de equações diferenciais.
- Seja um inteiro $N > 0$ e o passo $h = \frac{b-a}{N}$. Assim, o intervalo $[a, b]$ é particionado em N subintervalos com os pontos $t_j = a + jh$, para cada $j = 0, 1, \ldots, N$.
- Usa-se a notação w_{ij}, para cada $j = 0, 1, \ldots, N$ e $i = 1, 2, \ldots, m$ para denotar a aproximação a $u_i(t_j)$.

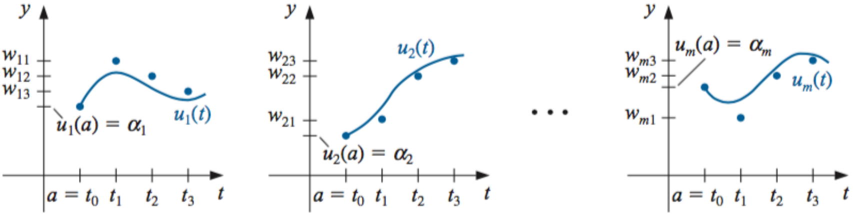

Figura: Aproximação por Runke-Kutta de cada uma das m equações diferenciais.

Sistemas de Equações Diferenciais

- Sejam as condições iniciais $w_{1,0} = \alpha_1, w_{2,0} = \alpha_2, \ldots, w_{m,0} = \alpha_m$ e que os valores $w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m,j}$ foram computados. Obtém-se $w_{1,j+1}, w_{2,j+1}, \ldots, w_{m,j+1}$:

$$
\begin{aligned}
k_{1,i} &= hf_i(t_j, w_{1,j}, w_{2,j}, \ldots, w_{m,j}),\\
k_{2,i} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{1,m}\right),\\
k_{3,i} &= hf_i\left(t_j + \frac{h}{2}, w_{1,j} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,j} + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_{m,j} + \frac{1}{2}k_{2,m}\right),\\
k_{4,i} &= hf_i\left(t_j + h, w_{1,j} + k_{3,1}, w_{2,j} + k_{3,2}, \ldots, w_{m,j} + k_{3,m}\right),\\
w_{i,j+1} &= w_{i,j} + \frac{1}{6}(k_{1,i} + 2k_{2,i} + 2k_{3,i} + k_{4,i}).
\end{aligned}
$$

  para cada $i = 1, 2, \ldots, m$.
- Observe que todos os valores $k_{1,1}, k_{1,2}, \ldots, k_{1,m}$ devem ser calculados antes de prosseguir para $k_{2,i}$ (e assim por diante). å

Método de Runge-Kutta para Sistemas de Equações Diferenciais

INPUT endpoints a, b; number of equations m; integer N; initial conditions $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

OUTPUT approximations w_j to $u_j(t)$ at the $(N+1)$ values of t.

Step 1 Set $h = (b-a)/N$;
$t = a$.

Step 2 For $j = 1, 2, \ldots, m$ set $w_j = \alpha_j$.

Step 3 OUTPUT $(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$.

Step 4 For $i = 1, 2, \ldots, N$ do steps 5–11.

Step 5 For $j = 1, 2, \ldots, m$ set
$k_{1,j} = hf_j(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$.

Step 6 For $j = 1, 2, \ldots, m$ set

$$k_{2,j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{1,2}, \ldots, w_m + \frac{1}{2}k_{1,m}\right).$$

Método de Runge-Kutta para Sistemas de Equações Diferenciais

Step 7 For $j = 1, 2, \ldots, m$ set

$$k_{3,j} = hf_j\left(t + \frac{h}{2}, w_1 + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_2 + \frac{1}{2}k_{2,2}, \ldots, w_m + \frac{1}{2}k_{2,m}\right).$$

Step 8 For $j = 1, 2, \ldots, m$ set

$$k_{4,j} = hf_j(t + h, w_1 + k_{3,1}, w_2 + k_{3,2}, \ldots, w_m + k_{3,m}).$$

Step 9 For $j = 1, 2, \ldots, m$ set

$$w_j = w_j + (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j})/6.$$

Step 10 Set $t = a + ih$.

Step 11 OUTPUT $(t, w_1, w_2, \ldots, w_m)$.

Step 12 STOP.

Exemplo

- **Exemplo.** Resolva o sistema de equações diferenciais ordinárias abaixo, sabendo que $I_1(0) = 0$, $I_2(0) = 0$ e $h = 0,1$, para obter $w_{1,1}$ e $w_{2,1}$.

$$\begin{aligned} I_1' =& f_1(t, I_1, I_2) = -4I_1 + 3I_2 + 6, \\ I_2' =& f_2(t, I_1, I_2) = -2,4I_1 + 1,6I_2 + 3,6. \end{aligned}$$

- **Resposta.** Aplicando o método de Runge-Kutta de Quarta Ordem, tem-se:
$w_{1,0} = I_1(0) = 0$ e $w_{2,0} = I_2(0) = 0$,
$k_{1,1} = hf_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0,6$,
$k_{1,2} = hf_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = 0,36$,
$k_{2,1} = hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}) = 0,534$,
$k_{2,2} = hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}) = 0,3168$,

Exemplo

- Obtendo os demais valores:
$k_{3,1} = hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}) = 0,54072,$
$k_{3,2} = hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}) = 0,321264,$
$k_{4,1} = hf_1(t_0 + h, w_{1,0} + k_{3,1}, w_{2,0} + k_{3,2}) = 0,4800912,$
$k_{4,2} = hf_2(t_0 + h, w_{1,0} + k_{3,1}, w_{2,0} + k_{3,2}) = 0,28162944,$
- Resultando em:
$w_{1,1} = w_{1,0} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) = 0,5382552,$
$w_{2,1} = w_{2,0} + \frac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) = 0,3196263.$
- Sendo a solução exata $I_1(t) = -3,375e^{-2t} + 1,875e^{-0,4t} + 1,5$ e $I_2(t) = -2.25e^{-2t} + 2,25e^{-0,4t}$, tem-se o erro absoluto:
$erro_1 = 0,00008285,$
$erro_2 = 0,00005803.$

Equações Diferencias de Ordem Superior

- Muitas situações reais envolvem problemas de valor inicial cujas equações têm ordem maior do que um.
- Não é preciso novas técnicas. Basta fazer uma redução de ordem da equação diferencial em um sistema de equações de primeira ordem.
- Um problema de valor inicial de *m*-ésima ordem:

$$y^{(m)}(t) = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}), \ a \leq t \leq b, \tag{7}$$

  com condições iniciais $y(a) = \alpha_1, y'(a) = \alpha_2, \ldots, y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$ pode ser convertido em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.
- Seja $u_1(t) = y(t), u_2(t) = y'(t), \ldots,$ e $u_m(t) = y^{(m-1)}(t)$.

Equações Diferencias de Ordem Superior

- O seguinte sistema de equações de primeira ordem é obtido:
$\frac{du_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = u_2,\ \frac{du_2}{dt} = \frac{dy'}{dt} = u_3,\ \cdots,\ \frac{du_{m-1}}{dt} = \frac{dy^{(m-2)}}{dt} = u_m,$
$\frac{du_m}{dt} = \frac{dy^{(m-1)}}{dt} = y^{(m)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(m-1)}) = f(t, u_1, u_2, \ldots, u_m),$
- Com as condições iniciais:
$u_1(a) = y(a) = \alpha_1,\ u_2(a) = y'(a) = \alpha_2,\ \ldots,\ u_m(a) = y^{(m-1)}(a) = \alpha_m$.
- **Exemplo.** Transforme o problema de valor inicial de segunda ordem:
$y'' - 2y' + 2y = e^{2t}\sin(t)$, para $0 \leq t \leq 1$, com $y(0) = -0,4$ e $y'(0) = -0,6$,
em um sistema de problemas de valor inicial de primeira ordem. Use o método de Runge-Kutta de quarta ordem com $h = 0,1$ para aproximar em $t = 0,1$.

Exemplo

- **Resposta.** Seja $u_1(t) = y(t)$ e $u_2(t) = y'(t)$. Assim, tem-se o sistema:
  $u_1'(t) = u_2(t)$,
  $u_2'(t) = e^{2t}\sin(t) - 2u_1(t) + 2u_2(t)$,
  com as condições iniciais $u_1(0) = -0,4$ e $u_2(0) = -0,6$.
- As condições iniciais fornecem: $w_{1,0} = -0,4$ e $w_{2,0} = -0,6$. Segue que:
  $k_{1,1} = hf_1(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = hw_{2,0} = -0,06$,
  $k_{1,2} = hf_2(t_0, w_{1,0}, w_{2,0}) = h[e^{2t_0}\sin(t_0) - 2w_{1,0} + 2w_{2,0}] = -0,04$,
  $k_{2,1} = hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}) = -0,062$,
  $k_{2,2} = hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{1,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{1,2}) = -0,03247644757$,

Exemplo

- Continuando...
  $k_{3,1} = hf_1(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}) = -0,06162832238,$
  $k_{3,2} = hf_2(t_0 + \frac{1}{2}h, w_{1,0} + \frac{1}{2}k_{2,1}, w_{2,0} + \frac{1}{2}k_{2,2}) = -0,03152409237,$
  $k_{4,1} = hf_1(t_0 + h, w_{1,0} + k_{3,1}, w_{2,0} + k_{3,2}) = -0,06315240924,$
  $k_{4,2} = hf_2(t_0 + h, w_{1,0} + k_{3,1}, w_{2,0} + k_{3,2}) = -0,02178637298,$
- Resultando em:
  $w_{1,1} = w_{1,0} + \frac{1}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) = -0,4617333423,$
  $w_{2,1} = w_{1,0} + \frac{1}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2}) = -0,6316312421.$
- Sendo a solução exata $u_1(t) = 0,2e^{2t}(\sin(t) - 2\cos(t))$ e $u_2(t) = 0,2e^{2t}(4\sin(t) - 3\cos(t))$, tem-se o erro absoluto:
  $erro_1 = 0,00000037,$
  $erro_2 = 0,000000775.$