Laboratório de Simulação Matemática

Parte 4[2]

Prof. Thiago Alves de Queiroz

2/2017

[2][Cap. 5] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. Numerical Analysis (9th ed). Cengage Learning, 2010.

Problemas de Valor Inicial

- O movimento de um pêndulo livre pode ser descrito pela *Equação Diferencial Ordinária* de segunda ordem $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin(\theta) = 0$.
- Um *problema de valor inicial* surge ao especificar a posição do pêndulo quando o movimento se inicia, $\theta(t_0) = \alpha_1$, e sua velocidade neste ponto, $\theta'(t_0) = \alpha_2$.
- Com a hipótese de pequeno valores para θ, tem-se que $\theta \approx \sin(\theta)$ e o problema, sendo linear, pode ser resolvido exatamente.
- Quando $\theta \approx \sin(\theta)$ não se aplica, acaba sendo preciso recorrer a um método numérico.

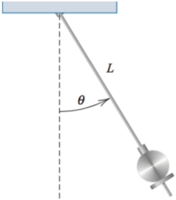
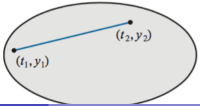
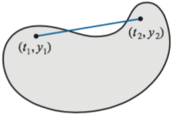


Figura: Pêndulo de comprimento L, $g \approx 9,82 m/s^2$ e ângulo θ com a vertical.

Problemas de Valor Inicial

- Equações diferenciais modelam problemas nas ciências e engenharias que envolvem a mudança de alguma variável com respeito a outra.
- Muitos problemas requerem a solução de *problemas de valor inicial* cujas equações diferenciais são complicadas de serem resolvidas exatamente.
- O uso de métodos numéricos para resolver essas equações fornece soluções aproximadas em certos valores.
- **Definição.** Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é dito convexo se para quaisquer (t, y_1) e (t, y_2) em D, então $((1-\lambda)t_1 + \lambda t_2,\ (1-\lambda)y_1 + \lambda y_2)$ pertence a D para qualquer $\lambda \in [0, 1]$.
- Ou seja, um conjunto é convexo se para quaisquer dois pontos dentro do conjunto, o segmento de reta com extremo nesses pontos também está contido no conjunto.





Método de Euler

- É a técnica mais elementar para aproximar problemas de valor inicial, sendo raramente usada na prática.
- A aproximação para a solução $y(t)$ vai ser gerada em vários valores, uma malha de pontos, de um intervalo $[a, b]$.
- Estipula-se que os pontos da malha estão igualmente espaçados, isto é, dado um inteiro positivo N, tem-se:

$$t_i = a + ih, \text{ para } i = 1, 2, \dots, N. \tag{1}$$

- A distância entre os pontos $h = \frac{b-a}{N} = t_{i+1} - t_i$ é chamada de *tamanho do passo*.
- O método de Euler é derivado a partir do Teorema de Taylor de ordem 1 para algum $\xi \in (t_i, t_{i+1})$:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2} y''(\xi_i) \tag{2}$$

Método de Euler

- Como $h = t_{i+1} - t_i$ e $y'(t) = \frac{dy}{dt} = f(t, y)$, tem-se:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_i). \tag{3}$$

- O método de Euler obtém $w_i \approx y(t_i)$, para cada $i = 1, 2, \ldots, N$, da seguinte forma:

$$w_0 = \alpha, \tag{4}$$

$$w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i), \text{ para cada } i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{5}$$

- A equação (5) é chamada de *equação de diferenças* associada ao método de Euler.

Método de Euler

- A interpretação geométrica do método de Euler sugere que quando w_i é uma aproximação para $y(t_i)$, tem-se que $f(t_i, w_i) \approx y'(t_i) = f(t_i, y(t_i))$.

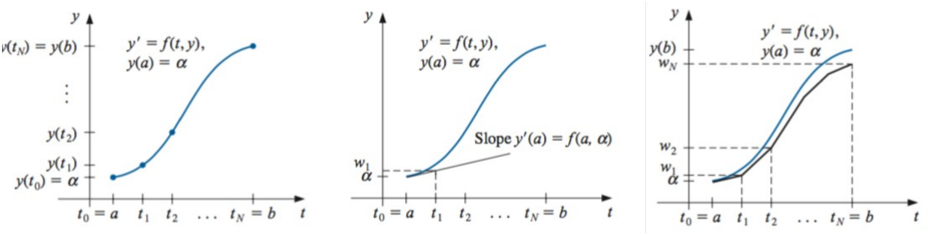


Figura: Interpretação geométrica do método de Euler.

Método de Euler

INPUT endpoints a, b; integer N; initial condition α.

OUTPUT approximation w to y at the $(N + 1)$ values of t.

Step 1 Set $h = (b - a)/N$;
$t = a$;
$w = \alpha$;
OUTPUT (t, w).

Step 2 For $i = 1, 2, \ldots, N$ do Steps 3, 4.

Step 3 Set $w = w + hf(t, w)$; (*Compute* w_i.)
$t = a + ih$. (*Compute* t_i.)

Step 4 OUTPUT (t, w).

Step 5 STOP.

Figura: Pseudo-código do método de Euler.

Exemplo

- **Exemplo.** Resolva o problema de valor inicial abaixo pelo método de Euler para $h = 0,5$ e $t = 2$.

$$y' = y - t^2 + 1,\ 0 \leq t \leq 2,\ y(0) = 0,5. \tag{6}$$

- **Resposta.** Sabendo que $f(t, y) = y - t^2 + 1$, então:
  $w_0 = y(0) = 0,5$,
  $w_1 = w_0 + 0,5(w_0 - (0)^2 + 1) = 0,5 + 0,5(1,5) = 1,25$,
  $w_2 = w_1 + 0,5(w_1 - (0,5)^2 + 1) = 1,25 + 0,5(2,0) = 2,25$,
  $w_3 = w_2 + 0,5(w_2 - (1,0)^2 + 1) = 2,25 + 0,5(2,25) = 3,375$,
  $w_4 = w_3 + 0,5(w_3 - (1,5)^2 + 1) = 3,375 + 0,5(2,125) = 4,4375$.
- Então, $y(2) \approx w_4 = 4,4375$.

Método de Taylor de Alta Ordem

- O método de Taylor de ordem n para resolver um problema de valor inicial é dado por:

$$w_0 = \alpha, \tag{7}$$

$$w_{i+1} = w_i + hT^{(n)}, \text{ para cada } i = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{8}$$

sendo:

$$T^{(n)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{n!} f^{(n-1)}(t_i, w_i). \tag{9}$$

- **Exemplo.** Aplique o método de Taylor de ordem 2 para o problema de valor inicial abaixo com $h = 0,5$ e $t = 2$:
$y' = y - t^2 + 1, \ 0 \leq t \leq 2, \ y(0) = 0,5.$
- **Resposta.** Para o método de ordem 2 é preciso a primeira derivada de $f(t, y(t)) = y(t) - t^2 + 1$ com respeito a variável t.

Exemplo

- Como $y' = y - t^2 - 1$, tem-se que:
  $f'(t, y(t)) = \frac{d}{dt}(y - t^2 + 1) = y' - 2t = y - t^2 - 1 - 2t$.
- Segue que:
  $T^{(2)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i) = w_i - t_i^2 + 1 + \frac{h}{2}(w_i - t_i^2 + 1 - 2t_i) =$
  $= \left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i$.
- Logo, escreve-se o método de segunda ordem como:

$$w_0 = 0,5, \tag{10}$$

$$w_{i+1} = w_i + h\left[\left(1 + \frac{h}{2}\right)(w_i - t_i^2 + 1) - ht_i\right]. \tag{11}$$

- Para $t_1 = 0,5$, $t_2 = 1$, $t_3 = 1,5$ e $t_4 = 2$, tem-se respectivamente:
  $w_1 = w_0 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_0 - (0)^2 + 1) - 0,5(0,5)\right] = 1,437500,$
  $w_2 = w_1 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_1 - (0,5)^2 + 1) - 0,5(1)\right] = 2,679688,$
  $w_3 = w_2 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_2 - (1)^2 + 1) - 0,5(1,5)\right] = 4,104492,$
  $w_4 = w_3 + 0,5\left[\left(1 + \frac{0,5}{2}\right)(w_3 - (1,5)^2 + 1) - 0,5(2)\right] = 5,513550.$

Método de Runge-Kutta de Alta Ordem

- O método de Taylor tem a vantagem do erro de truncamento local ser de alta ordem, porém precisa das derivadas da função.
- O método de Runge-Kutta tem a mesma vantagem do método de Taylor, porém não precisa das derivadas da função.
- O termo de quarta ordem $T^{(4)}(t, y)$ pode ser aproximado por uma expansão que envolve 12 parâmetros, resultando no método de *Runge-Kutta de Quarta Ordem*, para cada $i = 0, 1, \ldots, N-1$:

$$
\begin{aligned}
w_0 &= \alpha, \\
k_1 &= hf(t_i, w_i), \\
k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\
k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, w_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\
k_4 &= hf\left(t_{i+1}, w_i + k_3\right), \\
w_{i+1} &= w_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}
$$

Método de Runge-Kutta de Quarta Ordem

INPUT endpoints a, b; integer N; initial condition α.

OUTPUT approximation w to y at the $(N+1)$ values of t.

Step 1 Set $h = (b-a)/N$;
$t = a$;
$w = \alpha$;
OUTPUT (t, w).

Step 2 For $i = 1, 2, \ldots, N$ do Steps 3–5.

Step 3 Set $K_1 = hf(t, w)$;
$K_2 = hf(t + h/2, w + K_1/2)$;
$K_3 = hf(t + h/2, w + K_2/2)$;
$K_4 = hf(t + h, w + K_3)$.

Step 4 Set $w = w + (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)/6$; (*Compute* w_i.)
$t = a + ih$. (*Compute* t_i.)

Step 5 OUTPUT (t, w).

Step 6 STOP.

Figura: Pseudo-código do método de Runge-Kutta de quarta ordem.

Exemplo

- **Exemplo.** Aplique o método de Runge-Kutta de quarta ordem no problema de valor inicial adiante com $h = 0,5$ e $t = 2$: $y' = y - t^2 + 1,\ 0 \leq t \leq 2,\ y(0) = 0,5.$
- **Resposta.** Para $t_0 = 0$, tem-se $w_0 = 0,5$.
- Enquanto que para $t_1 = 0,5$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(0, w_0) = 0,75000,\\
k_2 &= 0,5f\left(0 + \frac{0,5}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0,90625,\\
k_3 &= 0,5f\left(0 + \frac{0,5}{2}, w_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0,94531,\\
k_4 &= 0,5f\left(0,5, w_0 + k_3\right) = 1,0977,\\
w_1 &= w_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,425130.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Para $t_2 = 1$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(0,5,w_1) = 1,0876,\\
k_2 &= 0,5f\left(0,5+\frac{0,5}{2}, w_1+\frac{1}{2}k_1\right) = 1,2032,\\
k_3 &= 0,5f\left(0,5+\frac{0,5}{2}, w_1+\frac{1}{2}k_2\right) = 1,2321,\\
k_4 &= 0,5f\left(1, w_1+k_3\right) = 1,3286,\\
w_2 &= w_1+\frac{1}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) = 2,639603.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Para $t_3 = 1,5$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(1, w_2) = 1,3198,\\
k_2 &= 0,5f\left(1 + \frac{0,5}{2}, w_2 + \frac{1}{2}k_1\right) = 1,3685,\\
k_3 &= 0,5f\left(1 + \frac{0,5}{2}, w_2 + \frac{1}{2}k_2\right) = 1,3807,\\
k_4 &= 0,5f\left(1,5, w_2 + k_3\right) = 1,3851,\\
w_3 &= w_2 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 4,006819.
\end{aligned}
$$

Exemplo

- Para $t_4 = 2$, tem-se:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= 0,5f(1,5, w_3) = 1,3784, \\
k_2 &= 0,5f\left(1,5 + \frac{0,5}{2}, w_3 + \frac{1}{2}k_1\right) = 1,3168, \\
k_3 &= 0,5f\left(1,5 + \frac{0,5}{2}, w_3 + \frac{1}{2}k_2\right) = 1,3013, \\
k_4 &= 0,5f\left(2, w_3 + k_3\right) = 1,1541, \\
w_4 &= w_3 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 5,301605.
\end{aligned}
$$

- Sabendo que a solução exata é $y(t) = (t+1)^2 - 0,5e^t$, tem-se $y(2) = 5,3054720$.
- O erro absoluto da aproximação é dado por $|y(2) - w_4| = 0,0038670$.