O ***oposto*** do número complexo $z = a + bi$ é o número $-z = (-1)z = -a - bi$, enquanto que o seu ***conjugado*** é $\bar{z} = a - bi$. Na Figura 6.1, aparecem o número $2 + i$, o seu oposto $-2 - i$ e o seu conjugado $2 - i$.

A ***diferença*** de números complexos é dada por

$$(a + bi) - (c + di) = a - c + (b - d)i.$$

Se $z = a + bi \neq 0$, o número $z^{-1} = x + yi$ tal que

$$zz^{-1} = 1$$

é chamado ***inverso*** de z. Da igualdade

$$(a + bi)(x + yi) = 1$$

obtém-se

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2},\ y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Portanto,

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

O *quociente* de $z = a + bi$ por $w = c + di \neq 0$ é definido por zw^{-1}, e pode ser calculado assim:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Exercícios

6.1. Prove que

a) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

b) $\overline{zw} = \bar{z}\ \bar{w}$;

c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$;

d) $\bar{\bar{z}} = z$.

6.2. Calcule: i^3, i^4, i^5, i^{241}.

6.3. Efetue:

a) $(1 + i)^3 + (1 - i)^3$;

b) $(1 + i)^3(1 - i)^3$;

c) $\frac{(1 + i)^3}{(1 - i)^3}$.

6.4. Seja $z = 3 + 2i$. Represente no plano os números z, $\bar{z}$, $1/z$, $1/\bar{z}$, zi, $-z$. Observe que z e $1/\bar{z}$ têm a mesma direção, e que zi é perpendicular a z.

6.5. Efetue:

$$\frac{(3+3i)+(0{,}4-5{,}6i)}{5-2i}.(2{,}1+3{,}6i).$$

6.2 GEOMETRIA ANALÍTICA NO PLANO COMPLEXO

A Geometria Analítica no plano, estudada no Capítulo 2, pode ser refeita, com certas vantagens, utilizando-se a estrutura mais rica dos números complexos.

O ***módulo*** do número complexo $z = x + yi$ é dado por

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Observe que

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

A *distância* entre os números complexos $z = x + yi$ e $z_0 = x_0 + y_0 i$ é dada por

$$d(z, z_0) = |z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

de modo que uma *equação da circunferência* de centro z_0 e raio r é (veja a Figura 6.2)

$$|z - z_0| = r.$$

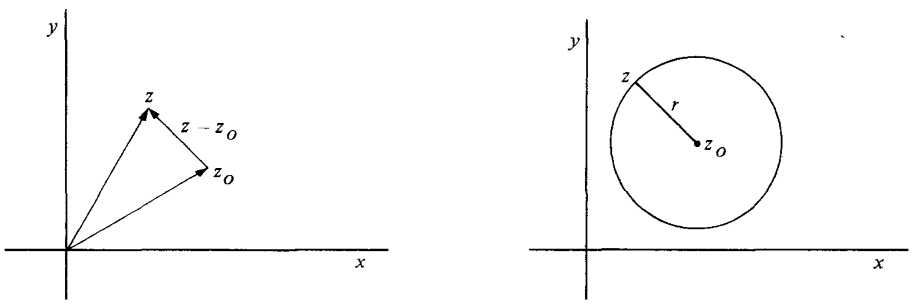

Fig. 6.2

Dados os números complexos z_0 e $w \neq 0$, uma *equação paramétrica da reta* que passa por z_0 e tem a direção de w é (veja a Figura 6.3)

$$z = z_0 + wt,$$

onde t é um parâmetro real.

que, juntamente com (1), produz

$$2 - \bar{z}z_0 - z\bar{z}_0 = 0,$$

como queríamos.

Exercícios

6.6. Mostre que

a) $|\bar{z}| = |z|$;
b) $|zw| = |z|\,|w|$;
c) $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$
d) $|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w}$,
$|z - w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\,\mathrm{Re}\, z\bar{w}$.

6.7. Prove a identidade

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2),$$

e enuncie a propriedade geométrica do paralelogramo que ela exprime.

6.8. Prove que, se z está na circunferência $|z| = 1$, então o número

$$\frac{z - w}{1 - \bar{z}w}$$

também está, qualquer que seja $w \neq z$.

6.9. Determine os números reais a e b para que a equação

$$(1 + i)z + (a + bi)\bar{z} + 1 + 2i = 0$$

represente:
a) uma reta;
b) um único ponto;
c) o conjunto vazio.

6.10. Dados os três vértices 2, $2i$ e $2 + 4i$ de um quadrado, determine o quarto vértice.

6.11. Dados os três vértices z_1, z_2 e z_3 de um paralelogramo, determine o quarto vértice.

6.12. Sendo a e c números complexos tais que $|a| \leq |c|$, determine alguns números complexos z que satisfaçam a equação

$$|z - a| + |z + a| = 2|c|.$$

O que acontece quando $|a| > |c|$?

6.13. Escreva a equação de uma hipérbole na forma complexa.

6.3 COORDENADAS POLARES

O produto e o quociente de números complexos têm uma interpretação muito simples quando se usa a forma polar.

Exemplo. Para determinar as raízes da equação $x^3 - 15x = 4$, citada na Seção 6.1, devemos calcular

$$z = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}.$$

A forma polar de $2 + 11i$ é, em números aproximados,

$$11{,}18(\cos 79{,}7^\circ + i \operatorname{sen} 79{,}7^\circ).$$

Logo, as raízes cúbicas de $2 + 11i$ são

$$\sqrt[3]{11{,}18}\left(\cos\frac{79{,}7^\circ + k.360^\circ}{3} + i \operatorname{sen}\frac{79{,}7^\circ + k.360^\circ}{3}\right), k = 0,1,2.$$

Obtemos,

para $k = 0$: $2 + i$
para $k = 1$: $-1{,}87 + 1{,}23i$
para $k = 2$: $-0{,}13 - 2{,}23i$.

Da mesma maneira, obtemos as raízes cúbicas de $2 - 11i$:

para $k = 0$: $2 - i$
para $k = 1$: $-0{,}13 + 2{,}23i$
para $k = 2$: $1{,}87 - 1{,}23i$.

A dedução da fórmula de Tartaglia indica o seguinte procedimento para determinar as raízes: escolhe-se uma raiz cúbica z_1 de $2 + 11i$ e uma raiz cúbica z_2 de $2 - 11i$ tais que

$$z_1 z_2 = -\frac{p}{3} = -\frac{-15}{3} = 5.$$

Escolhemos,

$$z_1 = 2 + i,\ z_2 = 2 - i.$$

Depois disto, as raízes são determinadas assim:

$$z_1 + z_2 = 4,$$
$$z_1 w + z_2 w^2 = (-1{,}87 + 1{,}23i) + (-1{,}87 - 1{,}23i) = -3{,}74,$$
$$z_1 w^2 + z_2 w = (-0{,}13 - 2{,}23i) + (-0{,}13 + 2{,}23i) = -0{,}26.$$

Exercícios

6.14. Mostre que as raízes n-ésimas de um número z são da forma

$$z_1 w^k,\quad k = 0, 1, ..., n - 1,$$

em que z_1 é uma raiz n-ésima de z, e

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}.$$

6.15. Utilizando a notação $e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta$, mostre que a multiplicação de $e^{i\theta}$ por z provoca uma rotação de um ângulo θ. Isto é, mostre que $ze^{i\theta}$ forma com z um ângulo θ. Em particular, a multiplicação por $i = e^{i\pi/2}$, provoca uma rotação de um ângulo reto.

6.16. Calcule:

a) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^5$;

b) as raízes de ordem 4 da unidade;

c) as raízes de ordem 4 de -1;

d) as raízes cúbicas de $2 + 2i$.

6.17. Formule equações cujas raízes são:

a) $2 + 3i$, $2 - 3i$;

b) $3, 1 + 2i$, $1 - 2i$;

c) $1, 1 + 2i$, $1 + 3i$.

6.18. Prove que, se z é uma raiz da equação de coeficientes reais

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

então o seu conjugado $\bar{z}$ também o é. Admitindo o fato de que uma equação de grau n tem exatamente n raízes, prove que uma equação do terceiro grau com coeficientes reais tem, pelo menos, uma raiz real.

6.19. Resolva as equações

a) $x^3 - 2x + 4 = 0$;

b) $2x^3 - 9x^2 + 14x - 5 = 0$.

6.4 CURVAS EM COORDENADAS POLARES

As equações de algumas curvas do plano têm as suas formas mais simples quando expressas em coordenadas polares.

Exemplo. A equação da circunferência, que na forma complexa é

$$|z| = 1$$

e, na forma cartesiana, é

$$x^2 + y^2 = 1,$$

escreve-se, na forma polar, simplesmente

$$r = 1,$$

já que

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

As equações da hipociclóide, como o leitor pode verificar, são

$$x=(a-b)\cos t+b\cos\frac{a-b}{b}t$$
$$y=(a-b)\operatorname{sen} t+b\operatorname{sen}\frac{a-b}{b}t,$$

sendo a e b os raios das circunferências fixa e móvel, respectivamente, e t o ângulo que $\vec{OQ}$ faz com o eixo x(Q é o centro da circunferência móvel e O, o centro da circunferência fixa).

Exercícios

6.20. Deduza uma fórmula para a distância entre dois pontos dados pelas suas coordenadas polares (r_1, θ_1) e (r_2, θ_2).

6.21. Esboce o gráfico das equações:

a) $r = \cos\theta$;
b) $r = 2(1 - \operatorname{sen}\theta)$;
c) $r = \cos n\theta$, para $n = 2$ e $n = 3$;
d) $r = \theta$, $\theta \geqslant 0$;
e) $r^2 = 4 \operatorname{sen} 2\theta$;
f) $r = 5$;
g) $\theta = \dfrac{5\pi}{2}$.

6.22. Esboce as cônicas dadas pelas equações:

a) $r = \dfrac{4}{1-\frac{1}{2}\cos\theta}$;

b) $r = \dfrac{4}{1-2\cos\theta}$;

c) $r = \dfrac{4}{1-\cos\theta}$.

6.23. Mostre que

$$x = a + b\cos t$$
$$y = a\operatorname{tg} t + b\operatorname{sen} t, \quad a > 0,\ b > 0$$

são equações paramétricas da curva cuja equação polar é

$$r = \frac{a}{\cos t} + b, -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Esta curva é chamada ***conchóide de Nicodemos***.

6.24. Seja C a circunferência de raio a e centro $(0, a)$ e s uma reta que contém a origem. Sejam A e B, respectivamente, os pontos de interseção de s com C e com a reta $y = 2a$. Por A trace uma paralela ao eixo x e por B, uma paralela ao eixo y. Seja P o ponto de interseção destas paralelas. Quando s varia, P descreve uma curva conhecida pelo nome de ***feiticeira***. Deduza suas equações paramétrica e cartesiana.