Vamos deduzir uma equação do cilindro, em relação a um sistema de coordenadas que contém s como eixo z. Seja R a distância entre r e s. Então, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se,

$$d(P, s) = R.$$

Mas, $d(P, s) = d(P, Q)$, onde $Q(0, 0, z)$. Logo, $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = R \quad \text{ou} \quad x^2 + y^2 = R^2,$$

que é a equação procurada.

Observe que a variável z não aparece nesta equação. Isto significa que, independentemente do valor de z, um ponto $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se, as suas duas primeiras coordenadas satisfazem a equação $x^2 + y^2 = R^2$. Ora, a projeção do ponto $P(x, y, z)$ sobre o plano xy é o ponto $(x, y, 0)$. Portanto, $P(x, y, z)$ pertence ao cilindro se, e somente se, a sua projeção pertence à circunferência

$$x^2 + y^2 = R^2, \; z = 0.$$

Observe também que, se tivéssemos escolhido o sistema de coordenadas de modo que o eixo y coincidisse com a reta s, a equação do cilindro seria

$$x^2 + z^2 = R^2,$$

ou ainda,

$$y^2 + z^2 = R^2$$

se a reta s fosse o eixo x.

Exercícios

5.1. Determine as coordenadas do centro da circunferência descrita pelo ponto $P(x, y, z)$ ao girar em torno do eixo *a)* x, *b)* y, *c)* z.

5.2. Determine as coordenadas de um ponto genérico da circunferência descrita por $Q(2, 3, 5)$ ao girar em torno do eixo y.

5.3. Determine a interseção do plano $x = 2$ com a circunferência descrita pela rotação do ponto $Q(-2, -1, 4)$ ao girar em torno do eixo z.

5.4. Escreva uma equação da superfície gerada pela rotação

a) da elipse

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = 0$$

em torno de seu eixo maior ;

b) da elipse

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad x = 0$$

em torno do eixo z;

c) da parábola $x = y^2$, $z = 0$ em torno de seu eixo;

d) da parábola $z = 4x^2$, $y = 0$ em torno do eixo z;

e) da hipérbole

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1, \quad x = 0$$

em torno do eixo z.

5.5. Deduza uma equação da esfera de centro na origem e raio r, girando a circunferência $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$ em torno do eixo x.

5.6. Escreva uma equação do cone gerado pela rotação da reta r em torno da reta s, onde

$$r: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -4 + 5t \\ z = 3 + t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + t. \end{cases}$$

5.7. a) Deduza uma equação da superfície gerada pela rotação da curva

$$z = y^2 - 4y, \; x = 0 \text{ e } y \geq 0$$

em torno do eixo z.

b) Descreva a interseção da superfície obtida em (a) com o plano yz.

c) Descreva a interseção da superfície obtida em (a) com o plano $z = k$. Discuta os casos $k > 0$, $k = 0$ e $k < 0$.

5.8. Deduza uma equação do cilindro de revolução gerado pela rotação da reta r em torno da reta s, sendo

$$r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = t \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = t. \end{cases}$$

5.9. Deduza uma equação da superfície gerada pela rotação da curva

$$z = \operatorname{sen} y, \quad 0 \leq y \leq 2\pi,$$

em torno do eixo y.

5.2 FORMAS CANÔNICAS

Como o leitor deve ter observado, as equações das quádricas deduzidas nos exemplos anteriores são casos particulares da equação

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Jz = R \qquad \text{(I)}$$

Outro caso particular desta equação, já estudado, ocorre quando os coeficientes A, B, C, D, E e F são nulos. Nestas condições, (I) reduz-se a

$$Gx + Hy + Jz = R$$

e seu gráfico é, como já vimos, um plano. Pode também acontecer de o gráfico de (I) reduzir-se a um ponto. Por exemplo, na equação

$$2x^2 + 4y^2 + z^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x^2}{2} + y^2 + \frac{z^2}{4} = 0$$

Comparando (I) com as equações dadas no enunciado, conclui-se que

$$-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{9}=1$$

é uma solução. Existem outras soluções?

Exercícios

5.10. Mostre que o gráfico de cada uma das equações seguintes reduz-se a um único ponto.
a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z + 6 = 0$;
b) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2xy - 2yz = 0$;
c) $x^2 + y^2 + z^2 - xy - x - y + 1 = 0$.

5.11. Mostre que o gráfico de

$$2x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz + 2yz + 8 = 0$$

é o conjunto vazio.

5.12. Esboce os cilindros dados pelas equações
a) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$;
b) $z = y^2 + 2$;
c) $z = x^2 + 2$;
d) $x + y = 0$;
e) $z = \cos y$;
f) $xy = 1$.

5.13. Faça um esboço do sólido delimitado inferiormente pelo plano xy, superiormente pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e lateralmente pelo cilindro $x^2 + (y - 1)^2 = 1$.

5.14. Determine a interseção da reta

$$x = 1$$
$$y = 2 + t$$
$$z = 4,$$

com o cilindro $y = x^2$.

5.15. Reduza cada uma das equações seguintes à forma canônica e identifique e esboce a quádrica que ela representa.
a) $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$;
b) $36x^2 + y^2 + 9z^2 = 9$;
c) $3x^2 - 8y^2 + 4z^2 = 1$;
d) $3x^2 - 8y^2 - 4z^2 = 1$;
e) $z = 4x^2 + y^2$;
f) $16z = 4x^2 - y^2$;
g) $y^2 = x^2 + z^2$;
h) $z^2 = x^2 + 2y^2$.

5.16. Encontre uma superfície tal, que sua interseção com planos da forma $x = k$ dá a elipse

$$\frac{z^2}{4}+\frac{y^2}{9}=k^2,$$

com planos da forma $y = k$, dá a hipérbole

$$9x^2-\frac{9z^2}{4}=k^2,$$

e, com planos da forma $z = k$, dá a hipérbole

$$4x^2-\frac{4y^2}{9}=k^2.$$

5.17. Deduza uma equação do parabolóide de revolução, de vértice na origem, sabendo que sua interseção com o plano $z = 1$ é a circunferência de centro (0, 0, 1) e raio 3.

5.18. Deduza uma equação do parabolóide, de vértice na origem, que contém a elipse cujos vértices são $A(\sqrt{6},0,3)$, $A_1(-\sqrt{6},0,3)$, $B(0,3,3)$ e $B_1(0, -3, 3)$.

5.19. Escreva uma equação do elipsóide que intercepta o plano xy segundo a elipse

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1, \quad z=0,$$

e que contém o ponto (1, 1, 1).

5.20. Escreva uma equação do hiperbolóide de uma folha que intercepta o plano xy segundo a elipse

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1, \quad z=0,$$

e o plano yz segundo hipérbole

$$\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{16}=1, \quad x=0.$$

5.21. Determine os focos e os vértices da elipse

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$$
$$y=2.$$

5.22. Determine o centro da circunferência dada pela interseção das superfícies

$z = x^2 + y^2$
$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

5.23. Determine os focos da cônica obtida pela interseção do plano $z = 2$ com o cone gerado pela rotação da reta r em torno da reta s, sendo

$$r: \begin{cases} x=0 \\ y=2z \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t. \end{cases}$$

5.24. Determine m para que o cone gerado pela rotação da reta $y = mz$, $x = 0$, em torno da reta $y = z$, $x = 0$, intercepte o plano $x = 1$ segundo a cônica $2yz = 1$.

5.3 CURVAS NO ESPAÇO

No estudo das superfícies, apresentado nos parágrafos anteriores, algumas vezes mencionamos curvas no espaço. As cônicas, por exemplo, surgiram ao fazermos interseções das quádricas com os planos coordenados. Em todos os casos, elas ficavam determinadas por pares de equações cartesianas. De modo geral, o gráfico de uma equação cartesiana no espaço é uma superfície, e uma curva no espaço não fica determinada por uma única equação. Determina-se, então, uma curva no espaço pela interseção de duas superfícies. O sistema constituído pelas equações das duas superfícies dá as equações cartesianas da curva.

Exemplo. Focos e vértices da cônica

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

$$z=2.$$

A cônica é dada pela interseção de um hiperbolóide de uma folha e um plano.

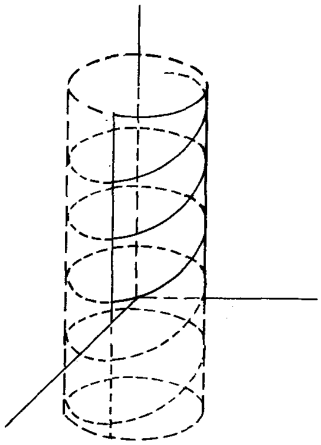

Fig. 5.31

Exercícios

5.25. Escreva equações paramétricas da curva dada pela interseção das superfícies

a) $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;

b) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ e $y = x^2 + 2$.

5.26. Mostre que a curva dada pela interseção das superfícies

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

não é plana.

5.27. Verifique que a curva cuja equações paramétricas são

$$x = \cos t$$
$$y = \text{sen } t$$
$$z = t$$

intercepta o plano $x - y = 0$ numa infinidade de pontos.

5.28. Deduza equações paramétricas da interseção

a) do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 1$;

b) dos cilindros $x = z^2$ e $x = 1 - y^2$.

5.29. Mostre que a tangente à curva

$$x = 6t$$
$$x = 3t^2$$
$$z = t^3$$

faz um ângulo constante com o vetor (1, 0, 1).

5.30. a) Escreva as equações da reta tangente à curva dada pela interseção do parabolóide

$$z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$$

com o plano $x = 2$, no ponto (2, 3, 2).

b) Escreva a equação cartesiana do plano tangente ao parabolóide

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

no ponto (x_o, y_o, z_o).

5.31. Escreva a equação cartesiana do plano osculador da curva

$$x = t$$
$$y = e^t$$
$$z = \cos t,$$

no ponto (0, 1, 1).